

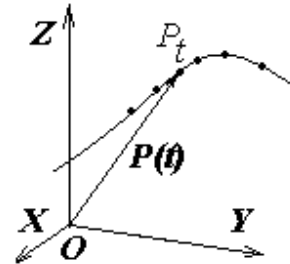
Curvas no espaço

por
Milton Procópio de Borba

A uma seqüência infinita de pontos P , cada um deles associado a um parâmetro real t , denominamos **curva** e representamos por $P_t(x_t, y_t, z_t)$.

A cada ponto P_t , associamos, ainda, um vetor posição $P(t)$ que “vai” da origem $O(0, 0, 0)$ ao ponto P_t .

Equação vetorial: $P(t) = [x(t), y(t), z(t)] = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$



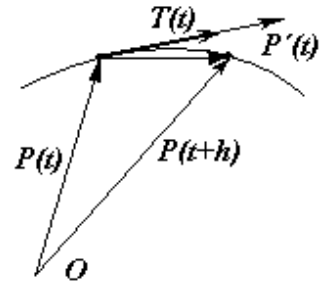
Vetor **Velocidade** da curva:

$$V(t) = P'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(t+h) - P(t)}{h} = [x'(t), y'(t), z'(t)]$$

é o vetor **tangente** á curva no ponto P_t .

Vetor **Tangente unitário** (módulo = 1): $T(t) = \frac{P'(t)}{|P'(t)|}$,

se o denominador não for zero (ponto singular)



Comprimento de arco de uma curva: O comprimento L , do ponto P_{t_0} até o ponto P_{t_f} ,

pode ser calculado por $L = \pm \int_{t_0}^{t_f} |ds| dt$, onde ds é o elemento de comprimento dado por

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{\frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{(dt)^2}} dt = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt.$$

Portanto, $L = \pm \int_{t_0}^{t_f} |P'(t)| dt$.

O comprimento $s = L(t)$ do “início” da curva (P_{t_0}) até um ponto genérico P_t , é dado por:

$$s = \int_{t_0}^t |P'(u)| du, \text{ obtendo } s \text{ como uma função de } t, \text{ ou seja } s = L(t).$$

Se pudermos explicitar t em função de s , obtendo $t = E(s)$, poderemos substituir t por $E(s)$ na equação vetorial da curva, obtendo uma nova **parametrização pelo comprimento de arco**: $P(t) = [x(t), y(t), z(t)] \Rightarrow C(s) = [f(s), g(s), h(s)]$

Neste caso, $|C'(s)| = 1$, para todo ponto C_s e o cálculo do comprimento de arco entre dois pontos C_{s_0} e C_{s_f} se reduz à diferença entre os dois parâmetros, ou seja $L = s_f - s_0$.

Exercícios

- 1) Apresente a equação vetorial de:
 - a) parábola $6x = y^2, z = 5$
 - b) circunferência de raio 3 no plano $y = 1$, centrada no eixo ($x = 7, z = 0$)
 - c) hélice circular centrada no eixo OX , de raio 4 e passo 6π
 - d) hélice elíptica centrada no eixo OZ , de raios 1 na direção OX , 2 na direção OY e passo 3

- 2) Parametrize pelo comprimento de arco:
 - a) a curva 1. b) a partir do ponto $A(4,1,0)$, no sentido negativo de Z .
 - b) a curva 1. c) a partir do ponto $B(0,0,-4)$, no sentido positivo de X e negativo de Y .
 - c) $C(t) = [t^2, 4t^3/3, t^4]$ a partir do ponto $O(0,0,0)$ nos sentidos positivos de X, Y e Z .

- 3) Calcule o comprimento de:
 - a) $C(t) = [t^2, 4t^3/3, t^4]$ do ponto $O(0,0,0)$ ao ponto $C(9,36, 81)$.
 - b) parábola 1. a) do ponto $D(6,6,5)$ ao ponto $E(0,0,5)$.

- 4) Determine os vetores **tangente unitários** das curva anteriores:
 - a) em pontos genéricos
 - b) nos pontos anteriormente citados.