

Exercícios sobre Operadores Diferenciais

por
Milton Procópio de Borba

- Dadas a função: $\phi(x, y, z) = x.e^{y^2} - z^3$ determine $\nabla \cdot \vec{\nabla}\phi(x, y, z)$ em $P(1; 0; -1)$
- Dadas as funções: $\vec{F} = (\frac{1}{x} + y)\vec{i} + (1 - z)\vec{j} + (z - x)^2\vec{k}$ e $\Phi = \sqrt{1 - 2x} + \frac{1}{y} - x - \frac{z^2}{2} + 10$, determine:
 - $grad(\Phi)$
 - $rot(\vec{F})$
 - $div(grad(\Phi))$
 - $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla}\phi)$
- Dadas $\phi(x, y, z) = 10 - x.y.z$, $\vec{v}(x, y, z) = [xz; yz; xy]$ e $\vec{w}(x, y, z) = [x^2; y^2; z^2]$, determine:
 - $\nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$
 - $(\nabla \times \vec{v}) \cdot (\nabla \times \vec{w})$
 - $\nabla(\nabla \cdot \vec{w})$
 - $\nabla \cdot \vec{\nabla}\phi$
- Um fluido escoa em movimento uniforme com velocidade dada por \vec{v} . Verificar se as funções vetoriais abaixo representam um possível fluxo incompressível.
 - $\vec{v} = [z^2; x; y^2]$
 - $\vec{v} = 2\vec{i} + x\vec{j} - \vec{k}$
 - $\vec{v} = 2xy\vec{i} + x\vec{j}$
- Verificar se o campo vetorial dado é irrotacional.
 - $\vec{f}(x, y, z) = [yz; xz; xy]$
 - $\vec{f}(x, y, z) = [xyz; 2x - 1; x^2z]$
 - $\vec{f}(x, y, z) = [x^2; y^2; z^2]$
- Sejam $\vec{f}(x, y, z) = [xz; yz; xy]$, $\vec{g}(x, y, z) = [x^2; y^2; z^2]$ e $h(x, y, z) = xy/z$. Determine:
 - $\nabla \cdot \vec{g} - \nabla \cdot \vec{f}$
 - $\nabla(\nabla \cdot \vec{g}) + \nabla \times \vec{f}$
 - $(\nabla \times \vec{f}) \cdot (\nabla \times \vec{g})$
 - $\nabla \cdot \vec{\nabla}h$
- Mostre que : a) $div(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot rot \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot rot \mathbf{v}$ b) $div(\mathbf{E} \nabla \mathbf{F} \times \mathbf{F} \nabla \mathbf{E}) = 0$
- Verifique se são irrotacionais e/ou solenoidais:
 - $\mathbf{S}(x, y, z) = [a, b, c]$, (com a, b, c constantes)
 - $\mathbf{T}(x, y, z) = -[x, y, z]$
 - $U = \alpha [x, y, z] / (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}$ (com α uma constante e n inteiro)
 - $V = [x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy]$
 - $W = [y + z, x + z, x + y]$
- Determine a função potencial de cada campo irrotacional anterior.
- Apresente superfícies equipotenciais (onde o potencial é constante) dos campos irrotacionais.

11. Verificar se são conservativos. Caso afirmativo, achar o potencial correspondente

a) $v_1(x, y, z) = [e^{y+2z}, xe^{y+2z}, 2xe^{y+2z}]$

b) $v_2(x, y, z) = [e^x \text{sen } y + 2y, e^x \text{cos } y + 2x - 2y, 0]$

c) $v_3(x, y, z) = [xy^2, yz^2, zx^2]$

d) $v_4(x, y, z) = [4x^2y \text{sen } 2x + 8xy \text{sen}^2 x, 4x^2 \text{sen}^2 x - z \text{sen } y, \text{cos } y]$

12. Calcule as segundas derivadas possíveis de $E = x^2 + y^2 + 2z^2$ e de $V = [xy^2, x^2z, xyz]$.

13. Mostre que sempre (qualquer campo) vale: $\text{rot}(\text{grad } E) = [0, 0, 0]$ e $\text{div}(\text{rot } V) = 0$

Gabarito:

1. 8

2 a) $\left[-\frac{1}{\sqrt{1-2x}} - 1, -\frac{1}{y^2}, -z \right]$

b) $[1, 2z - 2x, -1]$

c) $-\frac{1}{(1-2x)^{(3/2)}} + \frac{2}{y^3} - 1$

d) $-\frac{1}{(1-2x)^{(3/2)}} + \frac{2}{y^3} - 1$

3. a) $-y^3 + x^3 + xy^2 - yx^2$

b) 0

c) $[2, 2, 2]$

d) 0

4. a) sim

b) sim

c) não

5. a) sim

b) não

c) sim

6. a) $2x + 2y$

b) $[2 - x + y, 2 - x + y, 2]$

c) 0

d) $2 \frac{xy}{z^3}$

8. ***Todos são irrotacionais. S e W são solenoidais***

9. a) $P_S = ax + by + cz + d$

b) $P_T = -(x^2 + y^2 + z^2)/2 + C$

c) $P_U = [\alpha/(2-n)] (x^2 + y^2 + z^2) / (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2} + C$

d) $P_V = (x^3 + y^3 + z^3)/3 - xyz + C$

e) $P_W = xy + yz + xz + C$

10. a) **Planos**

b) **Esferas centradas na origem**

c) **Esferas centradas na origem**

d) $x^3 + y^3 + z^3 = C + 3xyz$, para qualquer C

e) $xy + yz + xz = C$, para qualquer C

11. $P_1 = xe^{-y+2z} + C$

$P_2 = e^x \sin y + 2xy - y^2 + C$

$P_4 = 4x^2y \sin^2 x + z \cos y + C$

12. $\text{grad}(E) = [2x, 2y, 4z] \rightarrow \text{div}(\text{grad}(E)) = 8$

$\text{rot}(\text{grad}(E)) = [0, 0, 0]$

$\text{div}(V) = y^2 + xy \rightarrow \text{grad}(\text{div}(E)) = [y, 2y + x, 0]$

$\text{rot}(V) = [xz - x^2, -yz, 2xz - 2xy] \rightarrow \text{div}(\text{rot}(V)) = 0$

$\text{rot}(\text{rot}(V)) = [-2x + y, x - 2z + 2y, 0]$