Integrais de Linha

por

Milton Procópio de Borba

Como na definição de integral definida, a ***Integral de Linha*** de $F(x, y, z)$ ao longo de uma linha $C(t) = [\, x(t), y(t), z(t) \,]$ é a soma de infinitas parcelas do tipo $F(x_n, y_n, z_n).\, ds_n$

$$\int_C F(x, y, z)\,.\,ds = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} F(x_n, y_n, z_n).\, ds_n \; ,$$

onde ds_n = *comprimento do minúsculo trecho da curva, contendo o ponto* (x_n, y_n, z_n) ,

$$\sum_{n-1}^{N} ds_n \rightarrow \textit{Comprimento da curva } C \text{ e } \bigcup_{n-1}^{N} (x_n, y_n, z_n) \rightarrow \textit{Curva } C$$

Aqui, $F(x, y, z)$ pode ser um campo *escalar* ou *vetorial*.

Teremos como resposta, para $\int_C F(x, y, z)\,.\,ds$, respectivamente, um *escalar* ou *vetor*.

O seu cálculo se reduz, pela substituição, a integrais na variável t (*parâmetro da curva*).

De $s = \int_{t_0}^{t} |C'(u)|.du$, temos que $\dfrac{ds}{dt} = |C'(u)|$, ou que $ds = |C'(t)|.dt.$

Então, $$\int_C F(x, y, z)\,.\,ds = \int_{t_0}^{t_f} F\big(x(t), y(t), z(t)\big).\, |C'(t)|.dt.$$

Podemos, ainda, ter integrais do tipo $\int_C F(x, y, z)\,.\,dS$, *onde* $dS = [\, dx, dy, dz \,]$

(Aqui, dS é o vetor e não o seu comprimento ds)

Novamente, mudamos para o parâmetro t: $dS = [\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}].dt = C'(t).dt.$

Então, $$\int_C F(x, y, z)\,.\,dS = \int_{t_0}^{t_f} F\big(x(t), y(t), z(t)\big).C'(t).dt.$$

Agora, o resultado será um *escalar*, se F for um campo *vetorial* (produto escalar $F.C'$) e
o resultado será um *vetor*, se F for um campo *escalar* (produto de C' pelo escalar F).

Obs.: o escalar $\int_C F.\, dS$ é denominado a *<u>Circulação</u> de* F *ao longo da curva* C.

Uma das aplicações de *Circulaçào* é o cálculo do ***Trabalho*** realizado por uma *força* F

Quando o caminho for toda uma curva fechada C, costumamos representar por

$$\oint_C F\,.\,dS \text{ ou } \oint_C F\,.\,ds$$