

Operadores Diferenciais

por
Milton Procópio de Borba

Na verdade, $\nabla = [\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z]$ representa a 1ª derivada de campos escalares ($\nabla E = \text{grad } E$) e de campos vetoriais ($\nabla \cdot V = \text{div } V$ e $\nabla \times V = \text{rot } V$).

Como fica a segunda derivada, aplicação dupla de ∇ ? Vejamos:

Campo escalar = E	$\rightarrow \nabla \rightarrow \nabla E = \text{grad } E = V$	$\rightarrow \nabla \rightarrow \nabla \cdot V = \nabla \cdot (\text{grad } E) = \text{div}(\text{grad } E) = (*)$
		$\rightarrow \nabla \rightarrow \nabla \times V = \nabla \times (\text{grad } E) = \text{rot}(\text{grad } E) = [0,0,0]$
Campo vetorial = V	$\rightarrow \nabla \rightarrow \nabla \cdot V = \text{div } V = E$	$\rightarrow \nabla \rightarrow \nabla E = \nabla(\text{div } V) = \text{grad}(\text{div } V) = ?$
	$\rightarrow \nabla \rightarrow \nabla \times V = \text{rot } V = W$	$\rightarrow \nabla \rightarrow \nabla \cdot W = \nabla \cdot (\text{rot } V) = \text{div}(\text{rot } V) = 0$
		$\rightarrow \nabla \rightarrow \nabla \times W = \nabla \times (\text{rot } V) = \text{rot}(\text{rot } V) = ?$

(*) **Laplaciano**: de um campo escalar $E(x, y, z)$:

$$\text{div}(\text{grad } E) = \nabla^2 E = \Delta E = \partial^2 E / \partial x^2 + \partial^2 E / \partial y^2 + \partial^2 E / \partial z^2$$

Outros exemplos de

Campos Escalares: Divergentes de campos vetoriais
 Laplaciano de campos escalares

Campos Vetoriais: Rotacional de campos vetoriais

Campo Irrotacional: Dizemos que um campo V é irrotacional se $\text{rot}(V) = 0$

- Exemplos**: 1) $V_1(x, y, z) = [1, 2, 3]$
 2) $V_2(x, y, z) = [x, 2y, 3z]$

Lembrando que $\text{rot}(\text{grad } E) = [0,0,0]$, temos que $V = \text{grad } E \leftrightarrow E = \text{Potencial de } V$

- Contra Exemplos**: 1) $V_3(x, y, z) = [-y, x, 0]$
 2) $V_4(x, y, z) = [xy, 2z, 3yz]$

Campo Solenoidal: Dizemos que um campo V é solenoidal* se $\text{div}(V) = 0$

- Exemplos**: 1) $V_1(x, y, z) = [1, 2, 3]$
 2) $V_3(x, y, z) = [-y, x, 0]$

- Contra Exemplos**: 1) $V_2(x, y, z) = [x, 2y, 3z]$
 2) $V_4(x, y, z) = [xy, 2z, 3yz]$

(*) O campo se comporta como o campo magnético gerado por um solenoide (bobina).
 incompressível

Algumas outras Propriedades: $\text{div}(EV) = E(\text{div } V) + V \cdot \text{grad } E$

$$\text{rot}(EV) = E(\text{rot } V) + (\text{grad } E) \times V$$