

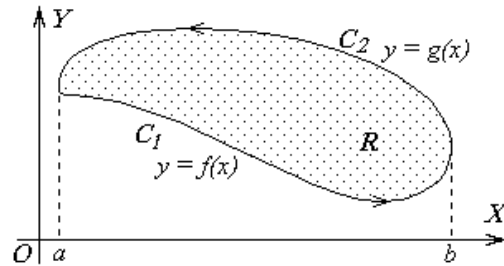
## Teoremas de Green

por

Milton Procópio de Borba

O Teorema de Green, transforma uma *integral dupla* (no plano  $XoY$ , por exemplo) numa *integral de linha* (contorno da região de integração) ou vice-versa.

Consideremos uma região  $R$  regular limitada pelas curvas  $C_1: y = f(x)$  e  $C_2: y = g(x)$ , ambas definidas para  $x$  entre  $x = a$  e  $x = b$ .  
 Para cada função  $U(x, y)$ , temos que



$$\iint_R \partial_y U(x, y) dy dx = \int_a^b \left[ \int_{f(x)}^{g(x)} \partial_y U(x, y) dy \right] dx = \int_a^b [U(x, g(x)) - U(x, f(x))] dx$$

Então, por trocas de sinais, conseguimos

$$-\iint_R \partial_y U(x, y) dy dx = \int_a^b U(x, f(x)) dx + \int_b^a U(x, g(x)) dx = \int_{C_1} U(x, y) dx + \int_{C_2} U(x, y) dx,$$

ou seja: 
$$\boxed{-\iint_R \partial_y U(x, y) dy dx = \int_C U(x, y) dx}, \text{ com } C = C_1 \cup C_2$$

De modo análogo, se  $R$  também for regular limitada pelas curvas

$C_3: x = p(y)$  e  $C_4: x = q(y)$ , ambas definidas para  $y$  entre  $y = c$  e  $y = d$ , para cada função

$V(x, y)$ , temos que 
$$\iint_R \partial_x V(x, y) dx dy = \int_c^d [V(q) - V(p)] dy = \int_{C_4} V(x, y) dy + \int_{C_3} V(x, y) dy,$$

ou seja: 
$$\boxed{\iint_R \partial_x V(x, y) dx dy = \int_C V(x, y) dy}, \text{ com } C = C_3 \cup C_4$$

Quando  $R$  não for regular nas duas direções ( $OX$  e  $OY$ ), podemos dividi-la em regiões assim regulares.

Numa só equação, temos o enunciado do **Teorema de Green**

Se  $U, V, \partial_x V$  e  $\partial_y U$  forem contínuas numa região  $R$  (do plano  $XoY$ ), então

$$\boxed{\iint_R (\partial_x V - \partial_y U) dx dy = \int_C (U dx + V dy) = \int_C [U, V] \cdot dS},$$

com  $C =$  fronteira de  $R$ , de forma que  $R$  fique na esquerda quando percorrermos  $C$  no sentido de integração.

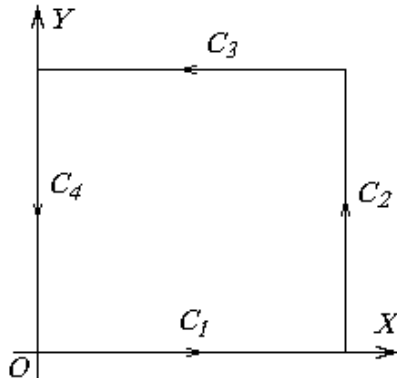
**Exemplo:**

Seja a função  $F(x, y) = [x + 2y^2, x^2 + 3y]$  e

a curva  $C$  dada pelo bordo do quadrado  $[0, 1]^2, z = 0$ .

Calcule a integral de linha  $\int_C F \cdot dS$  para a curva orientada no sentido anti-horário.

**Solução (sem usar o Teorema de Green):**



Parametrizando os segmentos:

$$C_1: [t, 0], 0 \leq t \leq 1$$

$$C_2: [1, t], 0 \leq t \leq 1$$

$$C_3: [1-t, 1], 0 \leq t \leq 1$$

$$C_4: [0, 1-t], 0 \leq t \leq 1$$

Calculando os vetores tangentes:

$$dS_1: [1, 0] dt, 0 \leq t \leq 1$$

$$dS_2: [0, 1] dt, 0 \leq t \leq 1$$

$$dS_3: [-1, 0] dt, 0 \leq t \leq 1$$

$$dS_4: [0, -1] dt, 0 \leq t \leq 1$$

Calculando a função em cada parte da curva:

$$C_1: F \cdot dS = (x + 2y^2) dt = t dt, 0 \leq t \leq 1$$

$$C_2: f(t) = (x^2 + 3y) dt = (1 + 3t) dt, 0 \leq t \leq 1$$

$$C_3: f(t) = -(x + 2y^2) dt = (t - 3) dt, 0 \leq t \leq 1$$

$$C_4: f(t) = -(x^2 + 3y) dt = (3t - 3) dt, 0 \leq t \leq 1$$

Calculando cada integral:

$$\int_{C_1} F \cdot dS = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = 1/2$$

$$\int_{C_2} F \cdot dS = \left[ t + \frac{3t^2}{2} \right]_0^1 = 5/2$$

$$\int_{C_3} F \cdot dS = \left[ \frac{t^2}{2} - 3t \right]_0^1 = -5/2$$

$$\int_{C_4} F \cdot dS = \left[ \frac{3t^2}{2} - 3t \right]_0^1 = -3/2$$

**Solução (usando o Teorema de Green):**  $\int_C [x + 2y^2, x^2 + 3y] \cdot dS = \iint_R (2x - 4y) dx dy =$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (2x - 4y) dx dy = \int_0^1 [x^2 - 4xy]_0^1 dy = \int_0^1 [1 - 4y]_0^1 dy = [y - 2y^2]_0^1 = -1$$

**Propriedades dos campos irrotacionais**

- 1)  $\int_C V \cdot dS$  independe do caminho  $C$  ( $V$  é conservativo)
- 2)  $\int_C V \cdot dS = 0$ , para qualquer caminho  $C$  fechado
- 3)  $V = \text{grad}(F)$  para algum campo escalar  $F$  (Potencial de  $V$ )
- 4)  $\int_A^B V \cdot dS = F(B) - F(A)$ , onde  $F = \text{potencial}$  de  $V$  ou  $V = \text{grad}(F)$ .