Solução de 5:

Em uma cidade, as pessoas falam a verdade com probabilidade *1/3*.
Suponha que A faz uma afirmação e D diz que C diz que B diz que A falou a verdade.
Qual é a probabilidade de que A tenha falado a verdade?

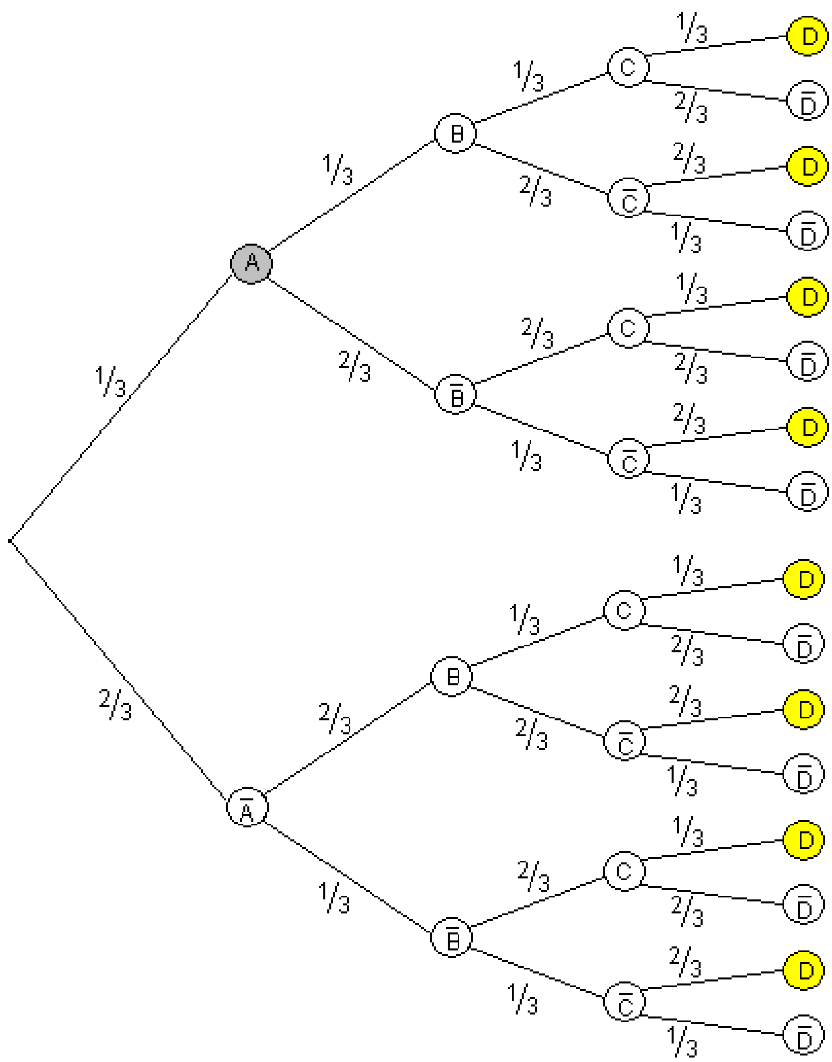
Estamos supondo que cada um (A, B, C e D) teve que falar o que disse o anterior.
Vamos considerar:

A = A falou a verdade
B = B disse que A falou a verdade
C = C disse que B disse que A falou a verdade
D = D disse que C disse que B disse que A falou a verdade

Então, queremos calcular $P(\mathbf{A} \mid \mathbf{D}) = ?$

Ora, $P(\mathbf{A} \mid \mathbf{D}) = \dfrac{P(\mathbf{A} \cap \mathbf{D})}{P(\mathbf{D})}$

Vamos omitir os sinais de interseção e observar a árvore abaixo.



Vemos que

$$P(\mathbf{A} \cap \mathbf{D}) = P(\mathbf{A}\ \mathbf{D}) = P(\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}\ \mathbf{D}) + P(\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \overline{\mathbf{C}}\ \mathbf{D}) + P(\mathbf{A}\ \overline{\mathbf{B}}\ \mathbf{C}\ \mathbf{D}) + P(\mathbf{A}\ \overline{\mathbf{B}}\ \overline{\mathbf{C}}\ \mathbf{D}) =$$

1/3.1/3.1/3.1/3 +1/3.1/3.2/3.2/3 +1/3.2/3.2/3.1/3 +1/3.2/3.1/3.2/3

$$P(\mathbf{A} \cap \mathbf{D}) = \frac{13}{81}$$

$$P(\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{D}) = P(\overline{\mathbf{A}}\ \mathbf{D}) = P(\overline{\mathbf{A}}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}\ \mathbf{D}) + P(\overline{\mathbf{A}}\ \mathbf{B}\ \overline{\mathbf{C}}\ \mathbf{D}) + P(\overline{\mathbf{A}}\ \overline{\mathbf{B}}\ \mathbf{C}\ \mathbf{D}) + P(\overline{\mathbf{A}}\ \overline{\mathbf{B}}\ \overline{\mathbf{C}}\ \mathbf{D}) =$$

2/3.2/3.1/3.1/3 +2/3.2/3.2/3.2/3 +2/3.1/3.2/3.1/3 +2/3.1/3.1/3.2/3

$$P(\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{D}) = \frac{28}{81}$$

$$P(\mathbf{D}) = P(\mathbf{A} \cap \mathbf{D}) + P(\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{D}) = \frac{13}{81} + \frac{28}{81} = \frac{41}{81}$$

Então, $P(\mathbf{A} \mid \mathbf{D}) = \dfrac{P(\mathbf{A} \cap \mathbf{D})}{P(\mathbf{D})} = \dfrac{13}{81} \div \dfrac{41}{81} = \dfrac{13}{41}$